

Asociované vektorové bundly

Def:

Muži G je Lieova grupa, \mathfrak{g} její Lieova algebra,
 A vektorový prostor, T reprezentace G na A a t rep. \mathfrak{g} na A

AM je vekt. bundl. asociovaný s grupový-bundl. GM
 a bundl. gM pokud se lze ke přecházejí
 struktury mezi standarding fibry G, \mathfrak{g}, A

[ve smyslu nelineárního isomorfismu]

$$\left[\begin{array}{llll} GU \cong G \times U & gU \cong \mathfrak{g} \times U & AU \cong A \times U & U \subset M \end{array} \right]$$

To znamená, že existuje zobrazení

$$h \in \text{Sect } GM \rightarrow T_h \in \text{Sect } A^1 M \quad \text{splývající}$$

$$T_{h_1 h_2} = T_{h_1} \cdot T_{h_2} \quad T_{h^{-1}} = T_h^{-1} \quad T_e = \mathbb{1}$$

$$m \in \text{Sect } gM \rightarrow t_m \in \text{Sect } A^1 M \quad t_m \frac{\partial}{\partial x^B} = m^A \frac{\partial}{\partial x^A} t_x \frac{\partial}{\partial x^B}$$

$$t_{[m_1, m_2]} = [t_{m_1}, t_{m_2}] \quad t_m = \frac{d}{dx^A} T_{h_0} \quad \text{ kde } m = \frac{Dh_0}{dx^A}$$

T nazýváme obce kalibrační grupy na AM

t nazýváme obce kalibrační algebry na AM

$t_x \frac{\partial}{\partial x^B}$ jsou generátory reprezentace na AM

Def

Obce T , resp. t na AM je konzistentní s metrickou
 strukturou H_{AB} na AM pokud

$$T_A^M \otimes T_B^N H_{MN} = H_{AB} \quad t_F^+ = -t_F$$

Pozn:

Podobně zavedeme asociaci komplexních vekt. bundlů
 a konzistentní reprezentaci s hermitovskou strukturou
 případně jinou strukt. jako např. orientace

Def: Trivializace na asociovaném bundlu

Necht AM je vekt. bundl asociovaný s bundly $GM, \mathfrak{g}M$

Trivializace e_α na $\mathfrak{g}M$ a E_α na AM jsou konzistentní s asociací pokud

$$C_{\mu\nu}^k = \text{konst}$$

- konzistence s lineárnou str. $\mathfrak{g}M$

$$t_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \text{konst}$$

- konzistence s asociací $AM, \mathfrak{g}M$

v případě reprezentace konzist. s dodatečnou strukturou,
požaduje obdobně konzistenci trivializace

mapy. pro reprezentaci konzist. s metrikou H požaduje též

$$H_{AB} = \text{konst}$$

- konzistence s metrikou na AM

Všechny konstanty jsou vzhledem k bázi trivializace
konstantní a je myšlena podél podkladové variety M

Lema: jednoznačnost trivializace na asociované bundle

Necht AM je vekt. bundl asociovaný s bundly GM, gM

necht G a g jsou polyposté

t je ireducibilní reprezentace konzistentní s metrikou H

Necht e_x a E_A jsou trivializace konzistentní s asociací a lieovskou strukturou a s metrikou

Pak volba báze e_x a konkrétních konst. koeficientů

$t_{\kappa B}^A$ a H_{AB} určuje volbu báze E_A jednoznačně

až na triviální volnost $E_A \rightarrow -E_A$

Důk:

necht E_A, \tilde{E}_A jsou dvě báze na AM splňující všechny podmínky výše
pak musí

$$\tilde{E}_A = E_B \Lambda_B^A \quad \text{zde } \Lambda_B^A \text{ je ortonormální}$$

$$\Lambda_A^M \Lambda_B^N = \delta_{AB} \quad \text{zde } \Lambda_B^A = H_{KM} \Lambda_{MN}^A H^{MA}$$

(plyne z konzistence s metrikou)

z konzistence s asociací plyne

$$t_{\kappa B}^A = t_{\mu \tilde{B}}^A \Rightarrow t_{\kappa B}^A = \Lambda_{\mu N}^A t_{\kappa N}^M \Lambda_B^N \Rightarrow [t_{\mu}, \Lambda]_B^A = 0$$

z ireducibility a Schwarzova lema plyne

$$\Lambda_B^A = \lambda \delta_B^A$$

Ortonormalita Λ dává

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad \Lambda = \pm \mathbb{1}$$

Poznámka:

pro věrnou reprezentaci polyposté alg. má vekt. pr. máme
plnou reducibilitu. Tj. reprezentací prostor se
rozpadá na součet ireducibilních komponent.

V obecném případě tak máme volnost v trivializaci
na AM do-on volbou znamená na každé ireducibilní
komponentě.

Indukovaná kovariantní derivace na asociovaném bundlu

Def: Derivace na asociovaném bundlu

Necht AM je vekt. bundl. asociovaný s bundly GM, gM

\mathcal{D} je derivace na gM a D je derivace na AM

\mathcal{D} a D jsou konzistentní s asociací, pokud platí

$$\mathcal{D}_\mu C_{\nu\rho}^\kappa = 0 \quad (\text{tj. } \mathcal{D}_\mu k_\nu = 0) \quad - \mathcal{D} \text{ konz. s } gM$$

$$D_\mu H_{\nu\sigma} = 0 \quad - D \text{ konz. s metr. na } AM$$

$$D_\mu t_{F B}^A = 0 \quad - \text{konzistence s asociací}$$

• poslední podmínice je $D = \mathcal{D} \oplus D$ rozšířením derivace na bundl. $g \oplus AM$

Pozn:

Podobnou def. lze formulovat i pro jiné struktury na AM např. hermitovskou strukt. h_{AB} či orientaci $\epsilon_{A_1 A_2 \dots}$

Lemma: Jednoznačnost souřadnicové derivace

Nechť AM je vekt. bundle asociovaný s bundly GM, gM
t věrné reprezentace

$e_\alpha \in E_A$ trivializace na gM a AM konzist. s asociací

Paž souřadnicové derivace ∂ na AM je dána jednoznačně

Důk:

Podle věty a poznámky dříve je báze E_A dána jednoznačně až na volbu znaménka na každé ireducibilní komponentě.

(Věrné konečnodimenz. reprezentace polynómové algebry je plně reducibilní bez triviálních komponent. Pro každou ireduc. komponentu máme volbu ve volbě báze pouze znaménko.)

Souřadnicová derivace ∂ na AM je dána podmínkou

$$\partial E_\alpha = 0$$

Ta identifikuje stejnou derivaci ∂ nezávisle na volbě (konstantního) znaménka.

Lemma Konzistence souřadnicové derivace s asociací

Nechť AM je vekt. bundle asociovaný s bundly GM, gM

e_α, E_α trivializace na gM a AM konzistentní s asociací

Souřadnicové derivace ∂ na gM a ∂ na AM dané trivializací jsou konzistentní s asociací, tj.

$$\partial c = 0 \quad \partial H = 0 \quad \partial t = 0$$

Důk:

$$\partial e_\alpha = 0 \quad \partial E_\alpha = 0 \quad C_{\mu\nu}^\kappa = \text{konst} \quad H_{AB} = \text{konst} \quad t_{\mu\nu}^A = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \partial c = 0 \quad \partial H = 0 \quad \partial t = 0$$

Věta: Indukování kov. der. na asociovaný bundl

Necht AM je vekt. bundl asociovaný s GM, gM

+ je věrné repr. konzistentní s metrikou H na AM

\mathcal{D} kov. derivace na gM konzist. se strukturou algebry

\Downarrow

kov. der. D na AM konzistentní s asociací a metrikou je dána jednoznačně

Důk.

Derivace D a \mathcal{D} mají splňovat

$$\mathcal{D}c = 0 \quad \mathcal{D}H = 0 \quad \mathcal{D}t = 0$$

Zvolme trivializace e_x, E_A konzist. se všemi strukt., pak

$$\partial c = 0 \quad \partial H = 0 \quad \partial t = 0$$

a ∂ na AM je dána volbou e_x jednoznačně

Necht $A_a^F \underline{x} = \mathcal{F}_a^k C_{kr}^F$ je vekt. potenciál \mathcal{D} vůči ∂ a $A_a^M \underline{N}$ je vekt. potenciál D vůči ∂

$$\mathcal{D} = \partial + A \quad D = \partial + A$$

Dělati

$$\Downarrow \mathcal{D}_a t_k^M \underline{N} = 0 \quad \partial_a t_k^M \underline{N} = 0$$

$$\Downarrow -A_a^{\underline{x}k} t_x^M \underline{N} + [A_a, t_k]^M \underline{N} = 0$$

$$\Downarrow -\mathcal{F}_a^y C_{yk}^{\underline{x}} t_x^M \underline{N} + [A_a, t_k]^M \underline{N} = 0$$

$$C_{yk}^{\underline{x}} t_x = [t_y, t_k]$$

$$\Downarrow [A_a - \mathcal{F}_a^y t_y, t_k]^M \underline{N} = 0$$

\neq věrnosti a plně reducibility repr. plyne Schwarzova lemma

$$A_a^M \underline{N} - \mathcal{F}_a^y t_y^M \underline{N} = \sum_k \pi_a^{(k)} P_{(k)}^M \underline{N}$$

$\neq DH=0 \quad \partial H=0$ a konzistence $t \Delta H$ plyne

$$A_a^T = -A_a \quad t_k^T = -t_k$$

ale projektoři $P_{(k)}$ jsou symetrické $P_{(k)}^T = P_{(k)}$

$\Rightarrow \pi_a^{(k)} = 0 \quad \Rightarrow A_a^M \underline{N} = \mathcal{F}_a^k t_k^M \underline{N} \Rightarrow D = \partial + A$ jednoznačně

Pozn:

Poloprostota grupy G a algebry \mathfrak{g} znamene, že adjoint reprezentace Ad a ad na \mathfrak{g} nesou veškerou podstatnou informaci o grupě, resp. algebře - jsou věrné nedegenerované. Navíc každé lineární operace splňující Leibnizovo pravidlo patří do reprezentace, $\text{Der } \mathfrak{g} = \text{ad } \mathfrak{g}$

Poloprosté grupy neposkytvají ale běžný případ, kdy grupa má invariantní komutující podgrupu, případně algebra má komutující ideál. To zahrnuje např. případ elektromagnetismu, kdy kalibrační grupa je $U(1)$. Adjoint reprezentace je poté triviální, $\text{ad} = 0$ jelikož závorhy jsou triviální, $c = 0$.

Tento případ se řeší umělou volbou nějaké netrivi. věrné reprezentace G či \mathfrak{g} na kalibr. algebře \mathfrak{g} , např. zadání generátorů t_k^E splňujících $[t_k^E, t_l^E] = 0$. Tato reprezentace pak nahradí adjoint reprezentaci ve výrazech jako

$$A_{ab}^E = F_{ab}^E t_k^E \quad \text{či} \quad F_{ab}^E = F_{ab}^E t_k^E$$

Kombinováno s technikou pro poloprostou algebru lze osvětlit případ redukovatelné algebry \mathfrak{g} .

Pozn:

Diťaz jednoznačnosť jak souřadnicové derivace D na AM ,
tak indukované derivace D na AM spočívá zejména
na věrnosti a reducibilitě reprezentace t

Ty umožňuje použít Schurovo lemma a zredukovat
volnost v definici trivializace E_A , případně volnost
ve tvaru rozdílů $A_a - \sum_k^k t_k$ na násobek jednotky
na každé ireducibilní komponentě.

Tuto zbyvající volnost jsme eliminovali použitím
kompatibility s metrickou strukturou na AM
V případě, že na asociovaném prostoru AM bude
reprezentace t kompatibilní s jinou strukturou
- např. s hermitovskou strukturou na komplexních
bundlích - eliminace zbyvající volnosti nemusí
být tak přímocivá. Hermitovské struktury by
maji. reflexovala její na jednotlivých ireducibilních
komponentách

Pozn:

Obecnější přístup k zachycení informace o kalibrační grupě, algebře a k definici asociovaných vektorových bundlů je založen na tzv. hlavních bundlech.

Intuitivně, hlavní bundl PM je prostor všech zobecněných bází, mezi kterými lze přecházet pomocí kalibrační transformace.

Tj. prvek fibru $E \in P_x M$ je zobecněná báze v x . Na každou bázi E lze zapůsobit transformací $h \in G$ jistě do kalibrační grupy G

$$E \rightarrow F = Eh \quad E \in P_x M$$

Naopak, každé dvě báze $E, F \in P_x M$ jsou spojeny nějakou kalibrační transformací h

Asociovaný bundl AM je definován volbou reprezentace T grupy G na standardní fibru A

Prvek $\phi \in AM$ lze chápat jako obecný objekt, který je zadán vůči bázi $E \in PM$ pomocí souřadnice $\underline{\phi} \in A$ ze standardního fibru

$$\phi = T_E \underline{\phi}$$

přechemž posud změní bázi $E \rightarrow E' = Eh$, musí změnit příslušné souřadnice $\underline{\phi} \rightarrow \underline{\phi}' = T_{h^{-1}} \underline{\phi}$

$$\phi = T_E \underline{\phi} = T_{E'} \underline{\phi}' = T_{Eh} (T_{h^{-1}} \underline{\phi})$$

Grupový bundl GM a bundl kalibr. algebry $\mathfrak{g}M$ lze chápat jako asociované bundly zadání pomocí reprezentací AD a Ad

Na hlavním bundlu PM lze definovat konexi, které definuje paralelní přenos bází.

Konexi PM jak umožňuje definovat jednovměrně indukovanou kovariantní derivaci na každém asociovaném vektorovém bundlu

Viz příleži. textové přednášky v rámci Vybraných partí OTR.